ÁLGEBRA LINEAL

Apellido: JIMENEZ
Nombres: ALEJANDRO

Carrera: MATEMATICA
L.U./Año: 576/07
TURNO MAÑANA

PRIMER PARCIAL
9 DE MAYO DE 2008

1	2	3	4	5	Calificación
B	M	X	B=	M	Insuficiente

1. Consideramos $V = \mathbb{Q}^4$ con la estructura usual de $\mathbb{Q}$ espacio vectorial. Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid x_1+2x_3 = 0 \wedge x_2+x_3 = x_4\}$, $T = <(2,-1,0,3),(1,0,0,2),(3,-2,0,4)>$ dos subespacios de V. Hallar un endomorfismo $f : V \to V$ que cumpla lo siguiente

   (a) $f(S) = S \cap T$,

   (b) $T \subseteq Nu(f) \subseteq S + T$,

   (c) f es nilpotente.

   Para la transformación f hallada calcular $f(1,1,1,1)$.

2. (a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Probar que existe un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ que verifica simultáneamente $Nu(f^2) = Nu(f) \oplus S$ y $\dim S = \dim f(S) \leq \dim Nu(f)$.

   (b) Deducir que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $rg(A^2) + n \geq 2rg(A)$.

3. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_2 + x_3 + (k-1)x_4 = 0,\ 2x_1 - x_3 = 0\},$$
$$T = \{x \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 - x_4 = 0,\ (k+1)x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

   (a) Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que S y T no están en suma directa.

   (b) Para uno de los k hallados, encontrar un subespacio $U \subset \mathbb{R}^4$ y un proyector $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que $\mathrm{Nu}(P) = S$, $\mathrm{Im}(P) = U$ y $U \cap T \neq \{0\}$.

4. Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}_2[X]$. Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial si y sólo en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ es inversible la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) \\ f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) \end{pmatrix}.$$

5. Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Sean $B_1^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y $B_2^* = \{\varphi_1 - 2\varphi_2, \varphi_3, \varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3\}$ sus respectivas bases duales. Hallar las coordenadas del vector $w_1 - w_2 + 3w_3$ en la base B_1.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS